

Title	群ニ於ケル Mass ト Topologie ノ関係ニツイテ (A.Weilノ定理ノ証明) I
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 175 p.69-p.102
Issue Date	1939-03-06
oaire:version	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74702">https://doi.org/10.18910/74702</a>
rights	
Note	

*Osaka University Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

## 772. 群 = 於ケル *Maß* ト *Topologie* ノ 関係 ニ ツ イ テ (A. Weil, 定理ノ 証明) I

小 平 邦 彦 (東大)

数年前ノ C. R. = 於テ A. Weil ハ 群ノ *Maß* ト *Topologie* ノ 関 = 密接ナル 関係ガ アル コトヲ 指摘シテ キル<sup>\*)</sup> ———  
群  $G$  = *Topologie* ガ 與ヘラレタトキ, ソノ *Topologie* = 關シテ  $y^{-1}x$  ガ 連続ナラベ, 吾々ハ  $G$  ハ *Topologische Gruppe* デアルトイフノ デアツタ. カリノ 如キ *Topologie* ハ  $G$  ノ 群トシテノ 演算ト或ル 關係ヲ 有スル. コノ = 於テ *Topologie* ノ 代リ = *Maß* ヲ 考ヘタナラバドウトルデアラウカ? 一般ニ, *Leumann* = 従ツテ, *Maß* ヲ 有スル 空間ノ *Abbildung* ハ, *meßbar* ナ 集合ノ *Urbild* ガ 常ニ *meßbar* ナルトキ *meßbar* デアルトイフコト = スレバ,  $y^{-1}x$  ノ *Stetigkeit* = 相當スルモノハ,  $G \times G$  ヲ  $G$  ヘ *abbilden* スル *Abbildung*  $y^{-1}x$  ノ *Meßbarkeit* デアラウ. Weil ハ  $y^{-1}x$  ガ *meßbar* デアルトイフコトヲ,  $f(x)$  ガ *meßbar* ナ 函数ナラバ  $f(y^{-1}x)$  モ *meßbar* デアル. トイフ形ニ 言ヒ 現ハシ, カリノ 如キ 性質ヲ モツ  $G$  ノ *Maß* =  $\wedge$  *ein-eindeutig* =  $y^{-1}x$  ガ 連続ナル *Topologie* ガ 對應シ. コノ *Topologie* = 關スル  $G$  ノ „*Kompaktifizierung*” ヲ  $\bar{G}$  トスレバ,  $\bar{G}$  ハ *im Kleinen kompakt* ナ 群デアツテ,  $G$  = 豫ジメ 與ヘラレデアツタ

\*) C. R. Tom. 272, 1147 (1936)

$\text{Map}$  は  $\overline{G}$ ,  $\text{Idaar}$ ,  $\text{Map}$  ト一致スル, ト主張スルノ  
デアルが, コノ証明ハ未だ為表サレナイ様デアル。

吾々ハ  $\text{Separabilität}$  ノ假定, 下ニ於テデハアルケ  
レドモ, 兎モ得コノーツノ証明ヲ與ヘルコトが出来, 又コレニ關係  
シタ二三ノ定理ヲ証明スル事が出来タカラ, 之ヲコニ書イテ見タイト思フ。

先ツ §1 = 於テ必要ナ概念ヲ説明シ, §2 = 於テ  $\text{Idaar}$  /  
 $\text{map}$  = 關スル主要ナ定理トソノ証明ヲ述べ, §3 = 於テ  $\text{Idaar}$   
/  $\text{Map}$  以外 = モ,  $\text{Idaar}$  /  $\text{Map} = \text{ヨツテ}$ ,  $y^{-1}x$  が  
 $\text{meßbar}$  デアレヌウ +  $\text{links-invariant}$  +  $\text{Map}$  が  
 $\text{induzieren}$  サレルコトヲ述ベル。コノデ吾々ハ  $y^{-1}x$  が  
 $\text{meßbar}$  +  $\text{links-invariant}$  +  $\text{Map}$  7 Weil,  
 $\text{Map}$  ト名付ケル。§4 = 於テ Weil,  $\text{Map}$  が  $\text{Idaar}$  /  
 $\text{Map} = \text{ヨツテ}$   $\text{induzieren}$  サレタ  $\text{Map}$  ナルタメノ必要  
且ツ充分ナル條件ヲ述ベル。コレハ或ル意味デ  $\text{Idaar}$  /  $\text{Map}$   
1.  $\text{Eindeutigkeitsatz}$  ノ拡張デアルト考ヘラレル。  
§5 = 於テハ先ガ  $\text{Map} =$  關スル  $\text{Separabilität}$  ノ定義  
ヲ述べ,  $\text{separabel}$  +  $\text{Weil}$  /  $\text{Map}$  ハ,  $\text{eindeutig} =$   
定マル  $\text{im Kleinen kompakt}$  + 群 /  $\text{Idaar}$  /  $\text{Map} =$   
 $\text{ヨツテ}$   $\text{induzieren}$  サレタ  $\text{Map}$  ナルコトヲ証明スル。コ  
レハ即チ Weil, 定理ニ他ナラナイ。§6 = 於テ以上ノ結果  
ヲ, シバラク  $\text{Idaar}$  /  $\text{Map}$  カラ離レテ,  $\text{separabel}$  +  
 $\text{Weil}$  /  $\text{Map}$  ト  $\text{separabel links-invariant}$  +  $\text{all-}$   
 $\text{gemeine Metrik}$  ノ間ノ關係トシテ考案スル。コノデ  
 $\text{allgemeine Metrik}$  トイフノハ, 三角不等式ハ成立スル

ケレドモ、必ずしも *Trennungsaxiom* を満足シナイ  
*Metrik* のコトデアル。ユークリッド空間 / *Metrik* と  
*Lebesgue* / *Maß* = 關シテハ、*Borel set* ハ *meßbar*  
 デアツテ、逆 = *meßbar* + 集合 = 對シテハコレト *Maß* の  
 ヲ除イテ一致スル *Borel* 集合が存在スルコトが容易ニナル。  
 吾々ハ一般ニ群 / *separabel* + *Weil* / *Maß* と *separa-*  
*bel links-invariant* + *allgemeine Metrik* /  
 間 = カク、如キ關係が存在スルトキ、コノ *Metrik* ハ *Maß*  
 = 屬スル *Metrik* デアルトイフコトニシ、*separabel* +  
*Weil* / *Maß* = ハコレ = 屬スル *Metrik* が存在シテ一意  
 的ニ定マルコト、逆 = *separabel* + *Weil* / *Maß* ハコ  
 レニ屬スル *Metrik* が與ヘレバ *eindeutig* = 定マルコ  
 トヲ証明スル。又、*separabel* + *Weil* / *Maß* トソレ  
 = 屬スル *Metrik* = 關シテハ、"density" トシテ "upper  
 density" ノミヲ考ヘルナラバ、所謂 "density theorem"  
 及ビコレニ相當スル *Überdeckungssatz* が成立スルコト  
 ヲ証明シ、逆 = , *separabel* + *Weil* / *Maß* と *separa-*  
*bel links-invariant* + *allgemeine Metrik* = 關  
 シテ "density theorem"、又ハ *Überdeckungssatz*  
 が成立スルナラバ、コノ *Metrik* ハ *separabel* +  
*Weil* / *Maß* = 屬スル *Metrik* デナレバナラナイコト  
 ヲ示ス。最後ノ § 7 = 於テ、*Weil* / *Maß* ヲ擴張スル問  
 題ヲ考察シ、又コレニ關スル例ヲ述ベル。

# § 1. Einleitung

1. Maß. 空間  $R$  ノ スベテ ノ 部分集合  $A =$  對シテ 定義  
サレタ 有限又ハ 無限大ノ 値ヲ トル *nicht-negativ* ノ 集合  
函数  $m^*(A)$  が 次ノ ニツノ 條件 1), 2) ヲ 満足スルトキ,  $m^*(A)$   
ヲ  $R$  ノ *Carathéodory* ノ *äußeres Maß* トイフ:

$$1) \quad A \subset B \text{ ナラバ } m^*(A) \leq m^*(B)$$

$$2) \quad m^*(A_1 + A_2 + A_3 + \dots) \leq m^*(A_1) + m^*(A_2) + \dots$$

コノ トキ,  $R$  ノ 部分集合  $A$  が, スベテノ  $X \subset R =$  對シテ

$$m^*(X) = m^*(X \cap A) + m^*(X - A)$$

ナル 條件ヲ 満足スレナラバ,  $A$  . *m-meßbar* デアルトイ  
ヒ,  $m^*(A)$  ヲ  $m(A)$  ト書イテ,  $m(A)$  ヲ  $A$  ノ *Maß* トヨブ。  
 $R$  ノ 任意ノ 部分集合  $X =$  對シテ 必ず

$$A \supset X, \quad m(A) = m^*(X)$$

ナル *m-meßbar* ノ 部分集合  $A$  が 存在スルトキ  $m^*$  ハ  
*regular* デアルトイハレル。

*Maß* ノ 定義. 吾々ハ *regular*<sup>1)</sup> デアルテ, 條件:

(a)  $R$  ハ 高々 可附属個ノ 有限ノ *Maß* ヲ 有スル *m-meßbar*  
ノ 部分集合ノ 和デアル:

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} A_j, \quad m(A_j) < +\infty;$$

---

1)  $m^*$  が *regular* ナイトキニハ, *m-meßbar* ノ 集合ノ  
*Maß* ヲ 求ヘナイテ,  $m^*$  ヲ *regular* ノ *äußeres Maß* =  
直スコトガ 出スル。

ヲ満足スル Caratheodory / äußeres Maß  $m^*$  ヲ,  
 äußeres Maß, 或ハ單 =  $\mathbb{R}$  / Maß トイフコト = スル。

$\mathbb{R}$  デ定義サレタ複素数値ヲトル函数  $f(x)$  ハ, 複素平面  
 上 / 任意 / 開集合  $O$  / Urbild  $f^{-1}(O)$  が常 =  $m$ -meßbar  
 ナルトキ,  $m$ -meßbar デアルトイフ。  $m$ -meßbar ナ函  
 数 = 對シテハ "Lebesgue" 積分ヲ考ヘルコトが出来ル。

コレヲ

$$\int_A f(x) m(dx)$$

デ現ハス。但シ  $A$  ハ積分範囲デアル。

$$\int_A |f(x)| m(dx) < +\infty$$

ナルトキ  $f(x)$  ハ  $A$  デ "summierbar" デアルトイフ。コ  
 ノトキ

$$\int_A f(x) m(dx)$$

ハ "絶対収斂" デアル。

2. Borel 族。吾々ハ  $G$  / 部分集合族  $\mathcal{F}$  が次ノ條  
 件 1), 2), 3) ヲ満足スルトキ,  $\mathcal{F}$  ヲ Borel 族トヨブコト =  
 スル:

1)  $A, B \in \mathcal{F}$  ナラバ  $A+B, A-B, A \cap B \in \mathcal{F}$ 。

2)  $A_j (j=1, 2, \dots) \in \mathcal{F}$  ナラバ  $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{F}$ 。

3)  $R = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{F}$  ナラバ  $A_j$  が存在スル。

$\mathcal{C}$  が Borel 族ナルトキ  $\widetilde{\mathcal{C}}$  = 属スル集合ノ高々可附番個ノ和ノ全体ハ亦 Borel 族ヲ作ル。コレヲ  $\widetilde{\mathcal{C}}$  デ現ハス。記号ヲ書ケバ

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \left( X; X = \sum_{j=1}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{C} \right)^{2)}$$

$\widetilde{\mathcal{C}}$  = 於テハ, 明ラカ =

$$A_j = (j=1, 2, \dots) \in \widetilde{\mathcal{C}} \text{ + ラバ } \sum_{j=1}^{\infty} A_j \in \widetilde{\mathcal{C}}$$

が成立スル。

$R$  ノ函数  $f(x)$  ハ開集合  $O$  ノ  $f = \text{ヨル Urbild } f^{-1}(O)$  が  $\widetilde{\mathcal{C}}$  = 含マレルトキ,  $\mathcal{C}$ -meßbar デアルトイフ。

$m^*$  が  $R$  ノ Maß ナルトキ, 有限ノ Maß  $\mu \in \mathcal{M}$   $m$ -meßbar ナ部分集合ノ全体ハ Borel 族ヲ作ル。コレヲ  $(m)$  デ現ハス:

$$(m) = (A; m(A) < +\infty)$$

然ルトキハ  $(m)$ -meßbar ハ  $m$ -meßbar ト一致スル。

Borel 族  $\mathcal{C}$  = 於テ有限ノ値ヲトル nicht-negativ, total additiv ナル集合函数  $\mu$  が與ヘラレタトキ,

$$X \subset R = \text{對シテ,}$$

---

2) 一般ニ  $f$  ナル性質ヲモツ元  $x$  全体ヨリ成ル集合ヲ  $(x; f(x))$  ナル記号ヲ現ハスコトニスル。コレハ *Heumann* ノ記号デアル。

$$\mu^*(X) = \underline{\lim} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad \sum_{j=1}^{\infty} A_j \supset X, A_j \in \mathcal{F};$$

が定義せられた  $\mu^*$  は明らに  $\mathbb{R}^+$  Map である。  $\mu^* \neq \mu =$   
 3) として  $\mu$  として  $\mathbb{R}^+$  Map と名付けれ。

total additive + 乗数函数  $\mu = \mu(A); A \in \mathcal{F}$  は

$$\mathcal{F} \subset (m), \quad m(A) = 0 \text{ ならば } \mu(A) = 0$$

上の条件を満足するものを  $m$ -absolut stetig であるとい  
 う。このとき

Rikodym の定理。  $\mu = \mu(A), A \in \mathcal{F}$  が  $m$ -absolut  
 stetig であるとき、  $\mu$  は  $\mathcal{F}$ -measurable 函数  $\varphi(x) =$   
 3) として

$$\mu(A) = \int_A \varphi(x) m(dx), \quad A \in \mathcal{F}$$

なる形に現はされる。  $\varphi(x)$  は  $m$ -Map の点を除けば  $\mu$   
 = 3) として eindeutig = 定まる。  
 が成立する。

3. Fubini の定理。  $m^*$  は空間  $\mathbb{R}^+$  Map とす  
 る。このとき cartesianes Produkt  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  の任意の  
 部分集合  $\Gamma$  に対して、  $m m^*(\Gamma)$  を次の如く定義する：

$$m m^*(\Gamma) = \underline{\lim} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) m^*(B_j),$$

$$\sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma;$$

但し  $\Gamma \neq \emptyset$  ならば、  $\sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma$  となるべし、  $A_j,$

3) 証明は Sakai: Theory of Integral; p. 32-36



$B_f: (C, R) = \forall i \neq j, x_i \in I, x_j \in J. m m^*, \text{ハ空間 } R \times R,$   
 $\text{Map}$  である。これを  $\text{Produkt-map}$  と名付ける。明らか  
 $\alpha = A, B \subset R$  が  $m$ - $\text{measurable}$  ならば、 $A \times B$  は  $m m$ - $\text{measur}$   
 $\text{able}$  である。

$$m(A \times B) = m(A)m(B).$$

$R$ 、二変数、函数  $f(x, y)$  は  $R \times R$  上、函数ト考ヘ  
ラレル。 $R \times R$  函数トシテ  $f(x, y)$  が  $m$ -meßbar ナ  
ルトキ、二変数、函数  $f(x, y)$  は  $m$ -meßbar ナアルト  
イヒ、ソノ積分ヲ

$$\int f(x, y) \, mm(d(x, y))$$

又八二重積分：

$$\iint f(x, y) \, m(dx) \, m(dy)$$

ヲ現ハス。然レトキハ

Fubini 1 定理. 二変数函数  $f(x, y)$  が  $m \times m$ -measurable +  $\mu$  と  $\nu$  上,  $m$ -Measure 0,  $x$  を除けば,  $f(x, y)$  は  $y$  函数として  $m$ -measurable である。  $f(x, y)$  が  $A \times B$  上で summierbar +  $\mu$  と  $\nu$  上,  $A$ ,  $m$ -Measure 0,  $x$  を除けば,  $f(x, y)$  は  $y = \text{任意} \in B$  上で summierbar である。  $x$ , 函数

$$\int_B f(x, y) \, m(dy)$$

$\wedge A^n$  summierbar, und

$$\iint_{A \times B} f(x, y) m(dx) m(dy) = \int_A m(dx) \int_B f(x, y) m(dy)$$

が成立スル。従つて又

$$\int_A m(dx) \int_B f(x, y) m(dy) = \int_B m(dy) \int_A f(x, y) m(dx)$$

4. Hilbert空間.  $m^* \in \mathcal{R}$ , Maß トスル, コ  
トキ

$$\int_{\mathcal{R}} |f(x)|^2 m(dx) < +\infty$$

トル  $m$ -meßbar 函数  $f(x)$ , 全体ハ

$$(f, g) = (f, g)_m = \int_{\mathcal{R}} f(x) \overline{g(x)} m(dx)$$

ヲ inneres Produkt トスル vollständig +, 必ズ  
シテ separabel ナハタイ „Hilbert 空間“ ヲ作ル。コ  
レヲ  $h_{\mathcal{R}}$ , 或ハ  $h_{\mathcal{R}}^{(m)}$  ナ現ハス。  $h_{\mathcal{R}}^{(m)}$  元  $f$ , „長さ“ヲ  
 $\|f\|$ , 或ハ  $\|f\|_m$  ト書ク:

$$\|f\| = \|f\|_m = \sqrt{(f, f)_m}$$

一般ニ  $\mathcal{R}$ , 部分集合  $A$ , „charakteristische  
Funktion“ヲ  $\chi_A(x)$  ナ現ハス: スナハチ

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A, \text{トキ} \\ 0 & \text{然ラザルトキ} \end{cases}$$

然ルトキハ,  $A, B \in (m)$  ナラバ明ラカニ

$$\|e_A - e_B\| = m(A-B) + m(B-A)$$

コレヲ  $m =$  ヨツテ定メテ レル  $A$  ト  $B$  ノ 距離 ト名付テ  $d_m(A, B)$   
ヲ現ハス:

$$\begin{aligned} d_m(A, B) &= m(A-B) + m(B-A) \\ &= \|e_A - e_B\|_m. \end{aligned}$$

然レ トキハ

定理 I. Hilbert 空間  $l_2^{(m)}_R$  が separabel + ル タ  
メノ 必要且充分ノ 条件ハ, Borel 族  $(m)$  が 距離  $d_m =$   
閉シテ separabel + ル コトデアル。

証明 <sup>4)</sup> ハ 殆ンド明白デアアル。

4) 充分ナルコトノ 証明ハ, 例ヘバ Neumann: Allgemeine  
Eigenwert theorie Hermitescher Operatoren  
(Math. Ann. 102) 参照。

必要ナルコトハ 例ヘバ 次ノ 如ク スレバナル:  $f_j(x)$  ( $j=1, 2,$   
 $3, \dots$ ) ヲ  $l_2^{(m)}_R$  中ニ überall dicht + 可附番集合トシ,  
 $|f_j(x) - 1| \leq \frac{1}{2}$  + ル  $x$  ノ 集合ヲ  $A_j$  トスル。  $A \in (m)$  及び  
 $\varepsilon > 0$  が任意ニ 與ヘラレタトキ

$$\|e_A - f_j\|^2 < \varepsilon$$

+ ル  $f_j$  がアル。 然ルニ

$$\|e_A - f_j\|^2 = \int_A |1 - f_j(x)|^2 m(dx) + \int_{G-A} |f_j(x)|^2 m(dx)$$

デアツテ

$$x \in A - A_j \quad + \quad \text{バ} \quad |1 - f_j(x)| \geq \frac{1}{2}.$$

$$x \in A_j - A \quad + \quad \text{バ} \quad |f_j(x)| \geq \frac{1}{2}$$

(次頁ヘツツテ)

5. Beschränkte Operatoren.  $\mathcal{H}$  separabel + Hilbert空間,  $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$   $\mathcal{H}$  / beschränkte Operatoren 全体 / 作る Ring トスル。  $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$  / 元  $P_0$  = 対シテ,

$$\mathcal{U}(P_0; f_1, \dots, f_k, \varepsilon) \\ = \{P; \|(P - P_0)f_j\| < \varepsilon, 1 \leq j \leq k\}$$

ヲ,  $f_1, \dots, f_k$  = ヨツテ定メラレル  $P_0$  /  $\varepsilon$ -Umgebung ト名付ケル。コノ  $\mathcal{U}(P; f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$  / 全体ヲ Umgebungssystem トシテ定メラレル  $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$  / Topologie ヲ stark + Topologie トヨブ。  $\mathcal{B}_{\mathcal{H}}$  ハコノ Topologie = 関シテ vollständig + topologischer linearer Raum ナル。<sup>5)</sup>

$\mathcal{H}$  / unitär + Operator ヲ  $U, V, \text{etc.}$  ナ環ハシ, unitäre Operatoren 全体 / 作る群ヲ  $\mathcal{U}_{\mathcal{H}}$  ナ環ハス。明カ =  $\mathcal{U}_{\mathcal{H}} \subset \mathcal{B}_{\mathcal{H}}$  ナアル。

定理2.  $\mathcal{U}_{\mathcal{H}}$  ハ stark + Topologie = 関シテ abzählbare Basis ヲ有スル vollständig + topologische  
(脚註4ノツビキ)

ナアルカラ

$$\frac{1}{4}m(A - A_j) + \frac{1}{4}m(A_j - A) < \varepsilon$$

ス + ハチ

$$d_m(A, A_j) < 4\varepsilon$$

故ニ  $A_j (j=1, 2, 3, \dots) \wedge (m) \neq d_m$ -überall dicht ナアル。

5) Heumann: Topologically complete linear space  
(Trans. Vol. 37) 参照。

Gruppe  $\mathcal{A}$  である。  $\psi_j (j=1, 2, \dots) \in \mathcal{H}_\mathcal{A}$  である。

$$[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots] = \mathcal{H}_\mathcal{A}^{(6)} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j\| < +\infty$$

それより更に、

$$\rho_\psi(u, v) = \sum_{j=1}^{\infty} \|(u-v)\psi_j\|, \quad u, v \in \mathcal{U}_\mathcal{H}$$

によって定義された  $\rho_\psi$  は  $\mathcal{U}_\mathcal{H}$  上の links-invariant な  
Metrik である。  $\psi_j$  の選定方法に関係なく  $\mathcal{U}_\mathcal{H}$  上の stark  
な Topologie を與へる。 従って  $\mathcal{U}_\mathcal{H}$  上の Metrik  $\rho_\psi$  は  
開いて vollständig である。<sup>7)</sup>

証明 I.  $u, v$  は連続である。 何となく

6)  $[\psi_1, \psi_2, \dots]$  は  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \dots$  を含む 最小の abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit を與へる。

7) 一般に topologische Gruppe  $G$  に対して

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} a_j^{-1} a_k = 1$$

なる Folge  $a_j (j=1, 2, \dots)$  を Fundamentalfolge とおくと、Fundamentalfolge が必ず収斂する  
とき、 $G$  は vollständig であるといふ。

$G$  上の Topologie が links-invariant な Metrik  $\rho(a, b)$  を與へておけるときの、

$$\rho(a_j^{-1} a_k, 1) = \rho(a_k, a_j)$$

であるから、 $G$  の Vollständigkeit と Metrik  $\rho$   
による Vollständigkeit と一致する。

$$U \in \mathcal{U}(U_0; V_0 f_1, \dots, V_0 f_k, \varepsilon),$$

$$V \in \mathcal{U}(V_0; f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$$

トスレバ

$$\|(U V - U_0 V_0) f_j\|$$

$$\leq \|U(V - V_0) f_j\| + \|(U - U_0) V_0 f_j\| < 2\varepsilon$$

デアールカラ

$$U \cdot V \in \mathcal{U}(U_0 V_0; f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$$

証明 II  $U^{-1}$  は  $U$  = ツイテ連続デアール. 何トナレバ

$$U \in \mathcal{U}(U_0; U_0^{-1} f_1, \dots, U_0^{-1} f_k, \varepsilon)$$

トスレバ

$$\|(U - U_0) U_0^{-1} f_j\| < \varepsilon$$

故 =  $U^{-1}$  が unitär デアールカラ

$$\|(U^{-1} - U_0^{-1}) f_j\| < \varepsilon$$

故 =

$$U^{-1} \in \mathcal{U}(U_0^{-1}; f_1, \dots, f_k, \varepsilon)$$

証明 III.  $\rho_\psi$  が links-invariant デ  $\mathbb{U}_{\mathcal{H}}$ , stark + Topologie 7 興ヘルコトハ明白デアール. 従ッテ  $\mathbb{U}_{\mathcal{H}}$  は separabel デアールカラ, abzählbare Basis 7 有スルコトガ合ル.<sup>8)</sup>

証明 IV.  $\mathbb{U}_{\mathcal{H}}$  は vollständig デアール. 何トナレバ  $U_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) 7 Fundamentalfolge トスレバ, 任意,  $f \in \mathcal{H}$  = 對シテ

8) 一般 = metrischer Raum が separabel + 7, 8, 9, 10  
ハ abzählbare Basis 7 有スル.

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ k \rightarrow \infty}} \| (u_j^T u_k - 1) f \| = 0,$$

従って

$$\lim \| (u_k - u_j) f \| = 0;$$

スナハテ  $stack + Topologie$  で

$$\lim (u_k - u_j) = 0$$

デアル。故に  $B_{H_f}$  が *vollständig* で、 $U_{H_f} \cap B_{H_f}$  内が *abgeschlossen* デアルカラ

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u$$

ナル  $u$  が存在スル。(証明終)

## §2. Haar, Maß

1. Haar, Maß. 吾々ハユ, § = 於テ Haar, Maß, 諸性質 = ツイテ述バル。先ヅ定義カラ始メヨウ:

Haar, Maß, 定義. abzählbare Basis 有スル im Kleinen kompakt 群  $G$ , Maß  $\mu^*$  が次ノ条件 1) — 4) を満足スルトキ,  $\mu^*$  7  $G$ , Haar, Maß トイフ:

$$1) \mu^* \text{ハ links-invariant デアル: } \mu^*(aA) = \mu^*(A), \\ a \in G.$$

$$2) A \text{ が kompakt}^{9)} \text{ + } \mu^*(A) < +\infty$$

$$3) G \text{ の Borel set ハ } \mu\text{-meßbar デアル。}$$

$$4) G \text{ の任意ノ部分集合 } A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$B \supset A, \mu^*(A) = \mu(B)$$

(付加註 9) 次回へ)

+ル Borel set  $B$  が存在スル。

従って  $\lambda$  Haar,  $\lambda$  Maß = 於てハ Baire 1 函数ハスベ  
テ measurable デアルヲ, 注意, measurable + 函数 = 對シテ,  
コレト Maß 0 7 除イテ一致スル Baire 1 函数が存在ス  
ル。

定理 3.  $\mu^*$  が  $\sigma$ ,  $\lambda$  Haar,  $\lambda$  Maß + ルトテ,  
Produkt-maß  $\mu\mu^*$ <sup>10)</sup> ハ  $\sigma \times \sigma$ ,  $\lambda$  Haar,  $\lambda$  Maß デ  
アル。

証明.  $\mu\mu^*$  が  $\lambda$  Haar,  $\lambda$  Maß, 満足スベキ条件  
1) - 4) 7 満足スルコトヲ確メレバヨイ。コノ中 1) - 3) ハ明  
白デアル。4) が成立スルコトヲ示スベキニ,  $\Gamma$  7  $\sigma \times \sigma$  1 性  
意, 部分集合トスル。然ルトテハ

$$\mu\mu^*(\Gamma) = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(A_j) \mu^*(B_j),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j \times B_j \supset \Gamma.$$

コノ式 = 於テ  $\mu^*$  ハ  $\lambda$  Haar,  $\lambda$  Maß デアルカラ,  $A_j, B_j$  ハ  
 $\sigma$  1 Borel set ト考ヘテヨイ。従ツテ  $A_j^{(N)}, B_j^{(N)}$  + ル Borel  
set 7 適當ニ選ベバ

$$\mu\mu^*(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^{(N)}) \mu(B_j^{(N)}),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(N)} \times B_j^{(N)} \supset \Gamma$$

9) 吾々ハ "kompakt" 7 kompakt in  $\sigma$ , 意味 = 同ヒル。

10)  $\mu\mu^*$ , 定義 = ヲイテハ §1. Nr 3 参照。



コゝ = 於テ

$$\Delta = \prod_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} A_j^{(N)} \times B_j^{(N)}$$

トオケバ, 明ヲカ =  $\Delta$ ,  $\Gamma$  ヲ含ム Borel set ナリツテ,

$$\begin{aligned} \mu\mu(\Delta) &\leq \mu\mu\left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j^{(N)} \times B_j^{(N)}\right) \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j^{(N)}) \mu(B_j^{(N)}) \end{aligned}$$

故 =  $N \rightarrow \infty$  トスレバ,  $\Delta \supset \Gamma$  ナルカラ

$$\mu\mu(\Delta) = \mu\mu^*(\Gamma). \quad (\text{証明終})$$

2. Eindeutigkeit. コゝヲ Haar, Maß, 一意性ヲ証明スル。

定理4. (Eindeutigkeitssatz) Abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt + 群  $G$ , Haar, Maß, multiplikativ + Konstant ヲ考ヘ = 入レ + ケレバ, eindeutig = 定マル。

証明. (B) ヲ  $G$ , kompakt + Borel set 全体ヨリ成ル Borel 族トスル。  $\mu_1^*, \mu_2^*$  ヲ  $G$ , ニツ, Haar, Maß トスレバ

$$\mu^*(A) = \mu_1^*(A) + \mu_2^*(A), \quad A \subset G$$

= ヨツテ 定義サレタ  $\mu^* \in \mathfrak{M}$  Haar, Maß ナリツテ, (B) ナ考ヘレバ,  $\mu_1$  ハ  $\mu$ -absolut-stetig + total additive Mengenfunktion ナル。従ツテ, Nikodym, 定理 = ヨツテ

$$\mu_1(B) = \int_B \varphi(x) \mu(dx) \quad B \in \mathcal{B}$$

＋ル Baire, 函数  $\varphi(x)$  が存在スル。然ル  $\mu_1, \mu$  共  
 $= \text{links-invariant}$  ナルカラ, 任意,  $a \in \mathcal{O}_f =$  對  
シテ

$$\mu_1(B) = \int_B \varphi(a^{-1}x) \mu(dx)$$

故  $=$ ,  $\varphi(a^{-1}x)$  と  $\varphi(x)$  は  $\mu$ -Maß の 7 除イテ 一致スル:  
スナハチ

$$\int_{\mathcal{O}_f} |\varphi(a^{-1}x) - \varphi(x)| \mu(dx) = 0$$

故  $=$

$$\int_{\mathcal{O}_f} \mu(da) \int_{\mathcal{O}_f} |\varphi(a^{-1}x) - \varphi(x)| \mu(dx) = 0$$

然ル  $=$ ,  $\varphi(a^{-1}x)$  は  $\mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$  の Baire 函数ナルカラ,  
 $\mu \mu$ -meßbar ナル。故  $=$  Fubini の定理  $=$  ヲツテ

$$\int_{\mathcal{O}_f} \mu(dx) \int_{\mathcal{O}_f} |\varphi(a^{-1}x) - \varphi(x)| \mu(da) = 0$$

故  $=$   $\mu$ -Maß の  $x$ -Menge  $X_0$  を除ケバ,  $x =$  ヲツ  
テ成マル  $\mu$ -Maß の  $a$ -Menge  $A_0(x)$  がアツテ

$$a \notin A_0(x) \quad \text{トキ} \quad \varphi(a^{-1}x) = \varphi(x)$$

トナル。今  $x, y \notin X_0$  とル任意, 二元トスレバ

$$\mu(x^{-1}A_0(x)) = 0, \quad \mu(y^{-1}A_0(y)) = 0$$

ナルカラ  $x^{-1}A_0(x)$  と  $y^{-1}A_0(y)$  は 共通元ヲ有

スル<sup>11)</sup>。コノ共通元  $h$  ヲ  $C$  トスレバ

$$C = x^{-1}a = y^{-1}b, \quad a \notin A_0(x), \quad b \notin A_0(y).$$

故ニ

$$a^{-1}x = b^{-1}y,$$

従ッテ

$$\varphi(x) = \varphi(y).$$

スナハチ  $\mu$ -Maß  $\phi$   $X_0$  上 除ケバ  $\varphi(x)$  ハ *constant* デアル。コノ *constant*  $\gamma_1$  トオケバ、

$$\mu_1(B) = \gamma_1 \mu(B) \quad B \in \mathcal{B}.$$

然ルニ  $\mu$  は  $\sigma$ -Maß  $\mu_1$  上  $\mathcal{B}$  上 集合  $B$  上 對スル値  $\gamma$  與ヘレバ *eindeutig* = 定マル。<sup>12)</sup> 故ニ

$$\mu_1^*(A) = \gamma_1 \mu^*(A), \quad A \subset \mathcal{O}_f$$

全ク同様ニ

$$\mu_2^*(A) = \gamma_2 \mu^*(A).$$

故ニ

$$\mu_1^*(A) : \mu_2^*(A) = \gamma_1 : \gamma_2 \quad (\text{証明終})$$

コノ *Eindeutigkeitssatz* = ヨツテ次ノ定理5ガ簡單ニ証明サレル。

定理5.<sup>13)</sup>  $\mu^*$  ガ  $\mathcal{O}_f$  上  $\sigma$ -Maß  $\mu$  上  $\mathcal{B}$  上 任意

---

11) 勿論  $\mu(\mathcal{O}_f) = 0$  ナル場合ハ除外スル。

12) 一般ニ separabel + metrischer Raum ハ abzählbare Basis 有スル。

13) コノ定理ハ *Eindeutigkeitssatz* = ヨツテ直接ニ証明サレル。§4 補助定理参照。

1.  $AC \mathcal{O}_f = \text{對シテ } \mu^*(A) \text{ の } A \text{ を含む開集合 } \Theta, \text{ Maß } \mu, \text{ 下  
限アイル。}$

$$\mu^*(A) = \inf_{\Theta \supset A} \mu(\Theta).$$

証明,  $AC \mathcal{O}_f = \text{對シテ}$

$$\bar{\mu}^*(A) = \inf_{\Theta \supset A} \mu(\Theta)$$

トオケバ  $\bar{\mu}^*$  亦 Haar, Maßデアッテ, 開集合  $\Theta = \text{對  
シテハ } \bar{\mu}(\Theta) \text{ ト } \mu(\Theta) \text{ ハ一致スル。故ニ Eindentigkeits-  
satz = ヨツテ}$

$$\bar{\mu}^*(A) = \mu^*(A). \quad (\text{証明終})$$

3. Hilbert 空間  $l_2^{(\mu)}$ .  $\mathcal{O}_f$  7 abzählbare Basis  
ヲ有スル im Kleinen kompakt + 群,  $\mu^*$  7 1/  
Haar, Maß トシ,  $l_2 \mathcal{O}_f = l_2^{(\mu)}$  7  $\mu$ -quadrat  
summierbar + 函数全体, 作ル Hilbert 空間,  $\mathbb{U}_{\mathcal{O}_f} =$   
 $\mathbb{U} l_2 \mathcal{O}_f$  7  $l_2 \mathcal{O}_f$ , unitär + Operator 全体, 作ル群ト  
スル. 定理5ヨリ直チニカルル如ク<sup>14)</sup>,  $l_2 \mathcal{O}_f$  ハ separabel  
デアルカラ, 定理2ニヨレバ,  $\mathbb{U}_{\mathcal{O}_f}$  ハ stark + Topolo-  
gie = 関シテ abzählbare Basis 7 有スル  
vollständig + topologische Gruppeデア

14) 何トナレバ:  $\mathcal{O}_f$ , abzählbare Basis 7  $(\Theta_j; j=1, 2, \dots)$  トシ,  $\Theta_j$ , 有限個ノ和ノ全体ヨリ成ル集合族  
ヲ  $(\Theta)$  トスレバ, 明カニ  $(\Theta)$  ハ  $(\mu)$  7 überall dicht  
+ 可附着集合デアル. 故ニ 定理1ニヨツテ  $l_2 \mathcal{O}_f$  ハ separabel  
デアイル。

ル。コノトキ

定理6.  $\mathcal{O}_f$  1元  $a = \frac{1}{2} \frac{f(x) + f(-x)}{f(x) - f(-x)}$  シテ,  $U_a \neq$

$$U_a f(x) = f(a^{-1}x), \quad f(x) \in \mathcal{H}_f \mathcal{O}_f$$

= ヲツテ定義サレタ unitärer Operator トスル。然  
ルトキハ

$$a \rightarrow U_a$$

ナル Abbildung = ヲツテ,  $\mathcal{O}_f \cap \mathbb{R} \mathcal{O}_f$  内 = topologisch  
isomorph = einbetten サレヌ。

証明. I)  $a \rightarrow U_a$  ハ明テ  $\neq$  Isomorphismus ナ  
アル。<sup>15)</sup>

II)  $a \rightarrow U_a$  ハ連続ナル。又  $a \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} a_N = a_0$  ナ  
ルトキハ, stark + Topologie  $\neq \lim_{N \rightarrow \infty} U_{a_N} = U_{a_0}$  ナ  
アル。何トナレバ, i)  $\Theta \neq \mu(\Theta) < +\infty$  ナル開集合ト  
スレバ

---

15) 何トナレバ。明テカニ

$$U_a U_b = U_{ab}$$

デアルカラ,  $a \neq b$  ナルトキ  $U_a \neq U_b$  ナルコトヲ示セバヨイ。コノ  
タメニ,  $\Theta \neq 1$ , 充分小  $\pi$  近傍トスレバ

$$a\Theta \wedge b\Theta = 0$$

デアル。從ツテ  $\Theta$ , charakteristische Funktion ナ  
ルヲトスレバ,

$$\|U_a e_\Theta - U_b e_\Theta\| = \|e_{a\Theta + b\Theta}\| = 2\mu(\Theta) > 0$$

故ニ  $U_a \neq U_b$  ナル。

$$F_j \subset F_{j+1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} F_j = \Theta$$

ナル *kompakt* + 閉集合  $F_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots$ ) が存在スル。  
 $\lim a_N = a_0$  ナルカラ,  $j =$  對シテ  $N(j)$  ナ充分大  
 キツトレバ,

$$N \geq N(j) \text{ ノトキ } a_N F_j \subset a_0 \Theta, \quad a_0 F_j \subset a_N \Theta$$

トナル; 從ツテ

$$d_\mu(a_N \Theta, a_0 \Theta) \leq 2\mu(\Theta - F_j).$$

故ニ

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \mu(\Theta - F_j) = 0$$

ナルカラ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_\mu(a_N \Theta, a_0 \Theta) = 0$$

從ツテ,  $\Theta$ , charakteristische Funktion  $\neq \mathcal{L}_\Theta$  ト  
 スレバ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\mathcal{U}_{a_N} - \mathcal{U}_{a_0}) \mathcal{L}_\Theta\| = 0.$$

ii)  $A$  ナ  $\mu$ -Maß 有限 + 任意,  $\mu$ -meßbar + 集合  
 トスルトキ, 定理 5 = ヨレバ, 任意,  $\varepsilon > 0$  = 對シテ

$$\Theta \supset A, \quad \mu(\Theta - A) < \varepsilon$$

ナル閉集合  $\Theta$  が存在スル。從ツテ

$$\|\mathcal{L}_A - \mathcal{L}_\Theta\| < \varepsilon.$$

故ニ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\mathcal{U}_{a_N} - \mathcal{U}_{a_0}) \mathcal{L}_A\| = 0$$

デナケレバナラナイ。

iii) 然ルニ任意、 $f \in \mathcal{H}_Y$  ハ  $\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_{A_j}$  ナ形ノ函数  
ノ limit トシテ現ハサレル。故ニ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \| (U_{a_N} - U_{a_0}) f \| = 0,$$

スナハチ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} U_{a_N} = U_{a_0}$$

デアラ。

$$\text{III) } \lim_{N \rightarrow \infty} U_{a_N} = U_{a_0} \text{ ナラバ } \lim_{N \rightarrow \infty} a_N = a_0 \text{ デアラ。}$$

何トナラバ  $\theta \neq 1$ 、任意ノ近傍トシタトキ、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \| U_{a_N} e_\theta - U_{a_0} e_\theta \| = 0$$

スナハチ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} d_\mu(a_N \theta, a_0 \theta) = 0$$

デアルカラ、 $N$  ガ充分大ナラバ

$$a_N \theta \sim a_0 \theta \neq 0,$$

従ッテ、

$$a_N \in a_0 \theta \theta^{-1}$$

デアラ。故ニ

$$\lim_{N \rightarrow \infty} a_N = a_0$$

—— I), II), III) = ヨッテ  $a \rightarrow U_a$  ガ *topologisch isomorph* ナ *Einbettung* ナルコトガワカル。<sup>16)</sup>

16)  $a \rightarrow U_a$  ノ連続性カラ水ノ定理ガ得ヲレル：定理  $\mu(A) > 0$

ナラバ  $A \cdot A^+$  ハ単位元ノ近傍ヲ含ム。(水頁ヘツヅク)

### § 3. Weil / Maß

1. Weil / Maß. 定義. 吾々ハ、群  $G$ , Maß  $m^*$  が次の二つの条件 1), 2) を満足スルトキ,  $m^* \neq 0$ , Weil / Maß トイフコトニスル:

1)  $m^*$  は links-invariant ナル:

$$m^*(aA) = m^*(A), \quad a \in G.$$

2)  $f(x)$  が  $G$  上  $m$ -meßbar ナ函数ナルトキ, 二変数  $x, y$  上函数  $f(y^{-1}x)$  も  $m$ -meßbar ナナル。<sup>17)</sup>

Weil / Maß ハ種々ノ著シイ性質ヲ有スル。例ヘバ

定理 7.  $m^* \neq 0$  上  $G$  上 Weil / Maß トニスル。コノトキ,  $G$  上部分集合  $A$  が  $m$ -meßbar ナラバ  $A^{-1} \in m$ -meßbar ナナル,  $m(A) = 0$  ナルトキハ  $m(A^{-1}) = 0$  ナナル。

証明.  $A$  上 charakteristische Funktion  $e_A(x)$  トスレバ,  $e_A(y^{-1}x)$  が  $m$ -meßbar ナナル。然ルニ

(脚註 16. v. d. N.) 証明:  $a \rightarrow U_a$  が stetig ナナルヲ  $\lim a = 1$  ナルトキ

$$\lim \|U_a e_A - e_A\| = 0$$

従フテ

$$aA \cap A \neq \emptyset$$

故ニ  $a$  が十分 1 に近イトキ  $a \in A \cdot A^{-1}$  ナナル。——

17)  $f(y^{-1}x)$  が  $m$ -meßbar トイフハ  $m \otimes m$ -meßbar, 意味ナル。§ 1. Nr. 3 参照。



$$e_A(y^{-1}x) = e_{xA^{-1}}(y)$$

デアルカラ, Fubini / 定理 = ヨツテ,  $xA^{-1}$  ハ Maß 0  
ノ外ヲ除ケバ  $m$ -meßbar デアル. 従ツテ,  $m$  が links-  
invariant デアルカラ,  $A^{-1}$  ハ  $m$ -meßbar デナレバ  
ナラナシ. 特ニ  $m(A) = 0$  ナレバ

$$\int_G m(dx) \int_G e_A(y^{-1}x) m(dy) = \int_G m(dy) \int_G e_A(y^{-1}x) m(dx) = 0$$

デアルカラ

$$m(A^{-1}) = \int_G e_A(y^{-1}x) m(dy) = 0$$

—— 1) 故ニ, Maß ハ Weil / Maß デアルガ,  
其ノ他 = 2) 1) 故ニ, Maß ヨリ „induzieren“ サレ  
ル Weil / Maß が存在スル. 以下ニ述ベル.

2. 1) 故ニ, Maß = ヨツテ induzieren サレ  
ル Maß.  $G$  ノ abzählbare Basis ヲ有スル im  
kleinen kompakt + 群,  $\mu^*$  ノ 1) 故ニ, Maß  
トシ,  $G$  ノ 1) normalteiler  $N =$  3) Restklassen  
gruppe  $G/N$  が  $G$  = 4) 5) 6) 7) 8) 9) 10) 11) 12) 13) 14) 15) 16) 17) 18) 19) 20) 21) 22) 23) 24) 25) 26) 27) 28) 29) 30) 31) 32) 33) 34) 35) 36) 37) 38) 39) 40) 41) 42) 43) 44) 45) 46) 47) 48) 49) 50) 51) 52) 53) 54) 55) 56) 57) 58) 59) 60) 61) 62) 63) 64) 65) 66) 67) 68) 69) 70) 71) 72) 73) 74) 75) 76) 77) 78) 79) 80) 81) 82) 83) 84) 85) 86) 87) 88) 89) 90) 91) 92) 93) 94) 95) 96) 97) 98) 99) 100) 101) 102) 103) 104) 105) 106) 107) 108) 109) 110) 111) 112) 113) 114) 115) 116) 117) 118) 119) 120) 121) 122) 123) 124) 125) 126) 127) 128) 129) 130) 131) 132) 133) 134) 135) 136) 137) 138) 139) 140) 141) 142) 143) 144) 145) 146) 147) 148) 149) 150) 151) 152) 153) 154) 155) 156) 157) 158) 159) 160) 161) 162) 163) 164) 165) 166) 167) 168) 169) 170) 171) 172) 173) 174) 175) 176) 177) 178) 179) 180) 181) 182) 183) 184) 185) 186) 187) 188) 189) 190) 191) 192) 193) 194) 195) 196) 197) 198) 199) 200) 201) 202) 203) 204) 205) 206) 207) 208) 209) 210) 211) 212) 213) 214) 215) 216) 217) 218) 219) 220) 221) 222) 223) 224) 225) 226) 227) 228) 229) 230) 231) 232) 233) 234) 235) 236) 237) 238) 239) 240) 241) 242) 243) 244) 245) 246) 247) 248) 249) 250) 251) 252) 253) 254) 255) 256) 257) 258) 259) 260) 261) 262) 263) 264) 265) 266) 267) 268) 269) 270) 271) 272) 273) 274) 275) 276) 277) 278) 279) 280) 281) 282) 283) 284) 285) 286) 287) 288) 289) 290) 291) 292) 293) 294) 295) 296) 297) 298) 299) 300) 301) 302) 303) 304) 305) 306) 307) 308) 309) 310) 311) 312) 313) 314) 315) 316) 317) 318) 319) 320) 321) 322) 323) 324) 325) 326) 327) 328) 329) 330) 331) 332) 333) 334) 335) 336) 337) 338) 339) 340) 341) 342) 343) 344) 345) 346) 347) 348) 349) 350) 351) 352) 353) 354) 355) 356) 357) 358) 359) 360) 361) 362) 363) 364) 365) 366) 367) 368) 369) 370) 371) 372) 373) 374) 375) 376) 377) 378) 379) 380) 381) 382) 383) 384) 385) 386) 387) 388) 389) 390) 391) 392) 393) 394) 395) 396) 397) 398) 399) 400) 401) 402) 403) 404) 405) 406) 407) 408) 409) 410) 411) 412) 413) 414) 415) 416) 417) 418) 419) 420) 421) 422) 423) 424) 425) 426) 427) 428) 429) 430) 431) 432) 433) 434) 435) 436) 437) 438) 439) 440) 441) 442) 443) 444) 445) 446) 447) 448) 449) 450) 451) 452) 453) 454) 455) 456) 457) 458) 459) 460) 461) 462) 463) 464) 465) 466) 467) 468) 469) 470) 471) 472) 473) 474) 475) 476) 477) 478) 479) 480) 481) 482) 483) 484) 485) 486) 487) 488) 489) 490) 491) 492) 493) 494) 495) 496) 497) 498) 499) 500) 501) 502) 503) 504) 505) 506) 507) 508) 509) 510) 511) 512) 513) 514) 515) 516) 517) 518) 519) 520) 521) 522) 523) 524) 525) 526) 527) 528) 529) 530) 531) 532) 533) 534) 535) 536) 537) 538) 539) 540) 541) 542) 543) 544) 545) 546) 547) 548) 549) 550) 551) 552) 553) 554) 555) 556) 557) 558) 559) 560) 561) 562) 563) 564) 565) 566) 567) 568) 569) 570) 571) 572) 573) 574) 575) 576) 577) 578) 579) 580) 581) 582) 583) 584) 585) 586) 587) 588) 589) 590) 591) 592) 593) 594) 595) 596) 597) 598) 599) 600) 601) 602) 603) 604) 605) 606) 607) 608) 609) 610) 611) 612) 613) 614) 615) 616) 617) 618) 619) 620) 621) 622) 623) 624) 625) 626) 627) 628) 629) 630) 631) 632) 633) 634) 635) 636) 637) 638) 639) 640) 641) 642) 643) 644) 645) 646) 647) 648) 649) 650) 651) 652) 653) 654) 655) 656) 657) 658) 659) 660) 661) 662) 663) 664) 665) 666) 667) 668) 669) 670) 671) 672) 673) 674) 675) 676) 677) 678) 679) 680) 681) 682) 683) 684) 685) 686) 687) 688) 689) 690) 691) 692) 693) 694) 695) 696) 697) 698) 699) 700) 701) 702) 703) 704) 705) 706) 707) 708) 709) 710) 711) 712) 713) 714) 715) 716) 717) 718) 719) 720) 721) 722) 723) 724) 725) 726) 727) 728) 729) 730) 731) 732) 733) 734) 735) 736) 737) 738) 739) 740) 741) 742) 743) 744) 745) 746) 747) 748) 749) 750) 751) 752) 753) 754) 755) 756) 757) 758) 759) 760) 761) 762) 763) 764) 765) 766) 767) 768) 769) 770) 771) 772) 773) 774) 775) 776) 777) 778) 779) 780) 781) 782) 783) 784) 785) 786) 787) 788) 789) 790) 791) 792) 793) 794) 795) 796) 797) 798) 799) 800) 801) 802) 803) 804) 805) 806) 807) 808) 809) 810) 811) 812) 813) 814) 815) 816) 817) 818) 819) 820) 821) 822) 823) 824) 825) 826) 827) 828) 829) 830) 831) 832) 833) 834) 835) 836) 837) 838) 839) 840) 841) 842) 843) 844) 845) 846) 847) 848) 849) 850) 851) 852) 853) 854) 855) 856) 857) 858) 859) 860) 861) 862) 863) 864) 865) 866) 867) 868) 869) 870) 871) 872) 873) 874) 875) 876) 877) 878) 879) 880) 881) 882) 883) 884) 885) 886) 887) 888) 889) 890) 891) 892) 893) 894) 895) 896) 897) 898) 899) 900) 901) 902) 903) 904) 905) 906) 907) 908) 909) 910) 911) 912) 913) 914) 915) 916) 917) 918) 919) 920) 921) 922) 923) 924) 925) 926) 927) 928) 929) 930) 931) 932) 933) 934) 935) 936) 937) 938) 939) 940) 941) 942) 943) 944) 945) 946) 947) 948) 949) 950) 951) 952) 953) 954) 955) 956) 957) 958) 959) 960) 961) 962) 963) 964) 965) 966) 967) 968) 969) 970) 971) 972) 973) 974) 975) 976) 977) 978) 979) 980) 981) 982) 983) 984) 985) 986) 987) 988) 989) 990) 991) 992) 993) 994) 995) 996) 997) 998) 999) 1000) 1001) 1002) 1003) 1004) 1005) 1006) 1007) 1008) 1009) 1010) 1011) 1012) 1013) 1014) 1015) 1016) 1017) 1018) 1019) 1020) 1021) 1022) 1023) 1024) 1025) 1026) 1027) 1028) 1029) 1030) 1031) 1032) 1033) 1034) 1035) 1036) 1037) 1038) 1039) 1040) 1041) 1042) 1043) 1044) 1045) 1046) 1047) 1048) 1049) 1050) 1051) 1052) 1053) 1054) 1055) 1056) 1057) 1058) 1059) 1060) 1061) 1062) 1063) 1064) 1065) 1066) 1067) 1068) 1069) 1070) 1071) 1072) 1073) 1074) 1075) 1076) 1077) 1078) 1079) 1080) 1081) 1082) 1083) 1084) 1085) 1086) 1087) 1088) 1089) 1090) 1091) 1092) 1093) 1094) 1095) 1096) 1097) 1098) 1099) 1100) 1101) 1102) 1103) 1104) 1105) 1106) 1107) 1108) 1109) 1110) 1111) 1112) 1113) 1114) 1115) 1116) 1117) 1118) 1119) 1120) 1121) 1122) 1123) 1124) 1125) 1126) 1127) 1128) 1129) 1130) 1131) 1132) 1133) 1134) 1135) 1136) 1137) 1138) 1139) 1140) 1141) 1142) 1143) 1144) 1145) 1146) 1147) 1148) 1149) 1150) 1151) 1152) 1153) 1154) 1155) 1156) 1157) 1158) 1159) 1160) 1161) 1162) 1163) 1164) 1165) 1166) 1167) 1168) 1169) 1170) 1171) 1172) 1173) 1174) 1175) 1176) 1177) 1178) 1179) 1180) 1181) 1182) 1183) 1184) 1185) 1186) 1187) 1188) 1189) 1190) 1191) 1192) 1193) 1194) 1195) 1196) 1197) 1198) 1199) 1200) 1201) 1202) 1203) 1204) 1205) 1206) 1207) 1208) 1209) 1210) 1211) 1212) 1213) 1214) 1215) 1216) 1217) 1218) 1219) 1220) 1221) 1222) 1223) 1224) 1225) 1226) 1227) 1228) 1229) 1230) 1231) 1232) 1233) 1234) 1235) 1236) 1237) 1238) 1239) 1240) 1241) 1242) 1243) 1244) 1245) 1246) 1247) 1248) 1249) 1250) 1251) 1252) 1253) 1254) 1255) 1256) 1257) 1258) 1259) 1260) 1261) 1262) 1263) 1264) 1265) 1266) 1267) 1268) 1269) 1270) 1271) 1272) 1273) 1274) 1275) 1276) 1277) 1278) 1279) 1280) 1281) 1282) 1283) 1284) 1285) 1286) 1287) 1288) 1289) 1290) 1291) 1292) 1293) 1294) 1295) 1296) 1297) 1298) 1299) 1300) 1301) 1302) 1303) 1304) 1305) 1306) 1307) 1308) 1309) 1310) 1311) 1312) 1313) 1314) 1315) 1316) 1317) 1318) 1319) 1320) 1321) 1322) 1323) 1324) 1325) 1326) 1327) 1328) 1329) 1330) 1331) 1332) 1333) 1334) 1335) 1336) 1337) 1338) 1339) 1340) 1341) 1342) 1343) 1344) 1345) 1346) 1347) 1348) 1349) 1350) 1351) 1352) 1353) 1354) 1355) 1356) 1357) 1358) 1359) 1360) 1361) 1362) 1363) 1364) 1365) 1366) 1367) 1368) 1369) 1370) 1371) 1372) 1373) 1374) 1375) 1376) 1377) 1378) 1379) 1380) 1381) 1382) 1383) 1384) 1385) 1386) 1387) 1388) 1389) 1390) 1391) 1392) 1393) 1394) 1395) 1396) 1397) 1398) 1399) 1400) 1401) 1402) 1403) 1404) 1405) 1406) 1407) 1408) 1409) 1410) 1411) 1412) 1413) 1414) 1415) 1416) 1417) 1418) 1419) 1420) 1421) 1422) 1423) 1424) 1425) 1426) 1427) 1428) 1429) 1430) 1431) 1432) 1433) 1434) 1435) 1436) 1437) 1438) 1439) 1440) 1441) 1442) 1443) 1444) 1445) 1446) 1447) 1448) 1449) 1450) 1451) 1452) 1453) 1454) 1455) 1456) 1457) 1458) 1459) 1460) 1461) 1462) 1463) 1464) 1465) 1466) 1467) 1468) 1469) 1470) 1471) 1472) 1473) 1474) 1475) 1476) 1477) 1478) 1479) 1480) 1481) 1482) 1483) 1484) 1485) 1486) 1487) 1488) 1489) 1490) 1491) 1492) 1493) 1494) 1495) 1496) 1497) 1498) 1499) 1500) 1501) 1502) 1503) 1504) 1505) 1506) 1507) 1508) 1509) 1510) 1511) 1512) 1513) 1514) 1515) 1516) 1517) 1518) 1519) 1520) 1521) 1522) 1523) 1524) 1525) 1526) 1527) 1528) 1529) 1530) 1531) 1532) 1533) 1534) 1535) 1536) 1537) 1538) 1539) 1540) 1541) 1542) 1543) 1544) 1545) 1546) 1547) 1548) 1549) 1550) 1551) 1552) 1553) 1554) 1555) 1556) 1557) 1558) 1559) 1560) 1561) 1562) 1563) 1564) 1565) 1566) 1567) 1568) 1569) 1570) 1571) 1572) 1573) 1574) 1575) 1576) 1577) 1578) 1579) 1580) 1581) 1582) 1583) 1584) 1585) 1586) 1587) 1588) 1589) 1590) 1591) 1592) 1593) 1594) 1595) 1596) 1597) 1598) 1599) 1600) 1601) 1602) 1603) 1604) 1605) 1606) 1607) 1608) 1609) 1610) 1611) 1612) 1613) 1614) 1615) 1616) 1617) 1618) 1619) 1620) 1621) 1622) 1623) 1624) 1625) 1626) 1627) 1628) 1629) 1630) 1631) 1632) 1633) 1634) 1635) 1636) 1637) 1638) 1639) 1640) 1641) 1642) 1643) 1644) 1645) 1646) 1647) 1648) 1649) 1650) 1651) 1652) 1653) 1654) 1655) 1656) 1657) 1658) 1659) 1660) 1661) 1662) 1663) 1664) 1665) 1666) 1667) 1668) 1669) 1670) 1671) 1672) 1673) 1674) 1675) 1676) 1677) 1678) 1679) 1680) 1681) 1682) 1683) 1684) 1685) 1686) 1687) 1688) 1689) 1690) 1691) 1692) 1693) 1694) 1695) 1696) 1697) 1698) 1699) 1700) 1701) 1702) 1703) 1704) 1705) 1706) 1707) 1708) 1709) 1710) 1711) 1712) 1713) 1714) 1715) 1716) 1717) 1718) 1719) 1720) 1721) 1722) 1723) 1724) 1725) 1726) 1727) 1728) 1729) 1730) 1731) 1732) 1733) 1734) 1735) 1736) 1737) 1738) 1739) 1740) 1741) 1742) 1743) 1744) 1745) 1746) 1747) 1748) 1749) 1750) 1751) 1752) 1753) 1754) 1755) 1756) 1757) 1758) 1759) 1760) 1761) 1762) 1763) 1764) 1765) 1766) 1767) 1768) 1769) 1770) 1771) 1772) 1773) 1774) 1775) 1776) 1777) 1778) 1779) 1780) 1781) 1782) 1783) 1784) 1785) 1786) 1787) 1788) 1789) 1790) 1791) 1792) 1793) 1794) 1795) 1796) 1797) 1798) 1799) 1800) 1801) 1802) 1803) 1804) 1805) 1806) 1807) 1808) 1809) 1810) 1811) 1812) 1813) 1814) 1815) 1816) 1817) 1818) 1819) 1820) 1821) 1822) 1823) 1824) 1825) 1826) 1827) 1828) 1829) 1830) 1831) 1832) 1833) 1834) 1835) 1836) 1837) 1838) 1839) 1840) 1841) 1842) 1843) 1844) 1845) 1846) 1847) 1848) 1849) 1850) 1851) 1852) 1853) 1854) 1855) 1856) 1857) 1858) 1859) 1860) 1861) 1862) 1863) 1864) 1865) 1866) 1867) 1868) 1869) 1870) 1871) 1872) 1873) 1874) 1875) 1876) 1877) 1878) 1879) 1880) 1881) 1882) 1883) 1884) 1885) 1886) 1887) 1888) 1889) 1890) 1891) 1892) 1893) 1894) 1895) 1896) 1897) 1898) 1899) 1900) 1901) 1902) 1903) 1904) 1905) 1906) 1907) 1908) 1909) 1910) 1911) 1912) 1913) 1914) 1915) 1916) 1917) 1918) 1919) 1920) 1921) 1922) 1923) 1924) 1925) 1926) 1927) 1928) 1929) 1930) 1931) 1932) 1933) 1934) 1935) 1936) 1937) 1938) 1939) 1940) 1941) 1942) 1943) 1944) 1945) 1946) 1947) 1948) 1949) 1950) 1951) 1952) 1953) 1954) 1955) 1956) 1957) 1958) 1959) 1960) 1961) 1962) 1963) 1964) 1965) 1966) 1967) 1968) 1969) 1970) 1971) 1972) 1973) 1974) 1975) 1976) 1977) 1978) 1979) 1980) 1981) 1982) 1983) 1984) 1985) 1986) 1987) 1988) 1989) 1990) 1991) 1992) 1993) 1994) 1995) 1996) 1997) 1998) 1999) 2000) 2001) 2002) 2003) 2004) 2005) 2006) 2007) 2008) 2009) 2010) 2011) 2012) 2013) 2014) 2015) 2016) 2017) 2018) 2019) 2020) 2021) 2022) 2023) 2024) 2025) 2026) 2027) 2028) 2029) 2030) 2031) 2032) 2033) 2034) 2035) 2036) 2037) 2038) 2039) 2040) 2041) 2042) 2043) 2044) 2045) 2046) 2047) 2048) 2049) 2050) 2051) 2052) 2053) 2054) 2055) 2056) 2057) 2058) 2059) 2060) 2061) 2062) 2063) 2064) 2065) 2066) 2067) 2068) 2069) 2070) 2071) 2072) 2073) 2074) 2075) 2076) 2077) 2078) 2079) 2080) 2081) 2082) 2083) 2084) 2085) 2086) 2087) 2088) 2089) 2090) 2091) 2092) 2093) 2094) 2095) 2096) 2097) 2098) 2099) 2100) 2101) 2102) 2103) 2104) 2105) 2106) 2107) 2108) 2109) 2110) 2111) 2112) 2113) 2114) 2115) 2116) 2117) 2118) 2119) 2120) 2121) 2122) 2123) 2124) 2125) 2126) 2127) 2128) 2129) 2130) 2131) 2132) 2133) 2134) 2135) 2136) 2137) 2138) 2139) 2140) 2141) 2

Abbildung  $\tau$   $\tau$   $\nu$ .  $\tau^{-1}$  „Umkehrung“  $\tau^{-1}$   
 が現はス。コノトキ

定理 8.  $A \subset G =$  對シテ

$$m^*(A) = \mu^*(\tau(A))$$

トオケベ,  $m^* = m^*(A)$   $\wedge$   $G$  links-invariant +  
 $\text{Map}^{(19)}$   $\tau$   $\tau$   $\nu$ .  $\sigma \subset G$  が  $\mu$ -meßbar + ルトキハ,  
 $\tau^{-1}(\sigma)$   $\wedge$   $m$ -meßbar  $\tau$   $\nu$ .

証明. i)  $m^*$   $\wedge$  links-invariant + Car-  
 théodory, äußeres Maß + ルコトハ明白 $\tau$   $\nu$ .

ii)  $\sigma$   $\tau$   $\mu$ -meßbar トスレバ, 任意  $A \subset G =$  對シテ  

$$m^*(A) = \mu^*(\tau(A)) = \mu^*(\tau(A) \cap \sigma) + \mu^*(\tau(A) - \sigma)$$

$$= m^*(A \cap \tau^{-1}(\sigma)) + m^*(A - \tau^{-1}(\sigma))$$

$\tau$   $\tau$   $\nu$  カラ,  $\tau^{-1}(\sigma) \in m$ -meßbar  $\tau$   $\nu$ . iii) 横  
 $\tau$   $\tau$   $G \in m$ -Map が有限 + 集合, 可附番個, 和トシテ現ハ  
 サレル. iv) 任意  $A =$  對シテ

$$\sigma \supset \tau(A), \quad \mu(\sigma) = \mu^*(\tau(A))$$

+ ル  $\mu$ -meßbar + 集合  $\sigma$  が存在スル. コノトキ明ラ  
 カ =

$$\tau^{-1}(\sigma) \supset A$$

$\tau$   $\tau$   $\nu$  テ,

$$\mu^*(A) \leq m(\tau^{-1}(\sigma)) = \mu^*(\sigma \cap G/N) \leq \mu(\sigma) = \mu^*(\tau(A)) = \mu^*(A)$$

18) コノ記号 =  $\exists$  レバ,  $\tau(G) = G/N$ .

$$\tau \tau^{-1}(\sigma) = \sigma \cap \tau(G) = \sigma \cap (G/N).$$

19) § 1, Nr. 1 Map, 定義参照.

故一

$$m^*(A) = m(r^{-1}(A)),$$

故  $m^*$  は regular ナル。 (証明終)

定義.  $\mathcal{O}_f = G/N$ ,  $\mu$ -inneres Maß が 0:

$$\mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0$$

ナルトキ

$$m^*(A) = \mu^*(r(A)), \quad A \subset G$$

=  $\exists$   $\nu$  ナ定義ナレタ  $G$  上 Maß  $m^*$  ナ  $\mathcal{O}_f$  上 Maß  $\mu^*$

=  $\exists$  ヲテ induzieren ナレタ Maß ト名付ケ,  $m_\mu^*$  ナ  
現ハス; スナハチ

$$m_\mu^*(A) = \mu^*(r(A)), \quad A \subset G.$$

コノトキ,  $G = G/N = \mathcal{O}_f$  ナラバ, 明ラカニ  $m_\mu^*$  ト  $\mu^*$  ハ一  
致ナル。<sup>20)</sup>

20) 一致  $m^*$  が空間  $R$  上 Maß ナルトキ,  $R$  上 部分集合  $X = \mathcal{O}_f$  ナラバ,  $X = \mathcal{O}_f$

ナレル  $m$ -meßbar ナ部分集合  $A$  上 Maß 上限  $\nu$   $X$  上  $\mu$ -inneres  
Maß ト名付ケ  $m_*(X)$  ナ現ハス。記号ヲ書ケバ

$$m_*(X) = \overline{\lim}_{A \subset X} m(A), \quad A \text{ は } m\text{-meßbar}$$

コノトキ,  $\exists$  ナ知ラレタキルナリ。  $A$  が  $m$ -meßbar ナラバ

$$m(A) = m^*(A \cap X) + m_*(A - X)$$

が成立スル。

$\mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0$  ナトキ,  $G/N$  が  $\mu$ -meßbar ナラバ  $G/N = \mathcal{O}_f$   
ナレバナラバナラハス; 従ッテ  $G/N \neq \mathcal{O}_f$  ナラバ  $G/N$  は  $\mu$ -meßbar  
ナハス。吾々ハ後ヲカク, 如キ  $G/N$  上 測度 超限帰納法ヲ用ヒテ  
構成スル。

定理9.  $G/N \subset \mathcal{O}_f$  かつ  $G, \text{ Map } m^*$  が  $\mathcal{O}_f$  の Haar Measure  $\mu$  を誘起する  $\text{Map}$  かつ  $\mu$  の必要且充分条件は、次の 1) 及び 2) が成立することである:

1)  $\mathcal{L}$  が  $\mathcal{O}_f$  の Borel set かつ  $r^{-1}(\mathcal{L})$  は  $m$ -measurable かつ

$$m(r^{-1}(\mathcal{L})) = \mu(\mathcal{L}).$$

2) 任意  $A \subset G$  に対して

$$r^{-1}(\mathcal{L}) \supset A, \quad m^*(A) = m(r^{-1}(\mathcal{L}))$$

かつ Borel set  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_f$  が存在する。

証明. 2) 必要かつ十分条件を示す。  $m^* = m_\mu^*$  と

する。 1)  $\mathcal{L}$  が Borel set かつ

$$\mu_*(\mathcal{L} - G/N) \leq \mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0$$

であるから

$$\mu(\mathcal{L}) = \mu^*(\mathcal{L} \cap G/N).$$

故に

$$m(r^{-1}(\mathcal{L})) = \mu^*(\mathcal{L} \cap G/N) = \mu(\mathcal{L}).$$

2) 任意  $A \subset G$  に対して

$$\mathcal{L} \supset r(A), \quad \mu^*(r(A)) = \mu(\mathcal{L})$$

かつ Borel set  $\mathcal{L}$  が存在する。このとき、明らかに

$$r^{-1}(\mathcal{L}) \supset A$$

であるから、1) の結果を利用すれば、

$$m^*(A) = \mu^*(r(A)) = \mu(\mathcal{L}) = m(r^{-1}(\mathcal{L})).$$

b) 充分条件の証明. 1)  $m^*$  が 1) 及び 2) を満

足スルモノトスル。コノトキ,  $\mathcal{L} \subset \mathcal{O}_f - G/N$  + ル Borel set  $\mathcal{L} =$  對シテハ  $r^{-1}(\mathcal{L}) = 0$  ナアルカヲ, 1) ニヨツテ

$$\mu(\mathcal{L}) = m(r^{-1}(\mathcal{L})) = 0$$

トナル。従ツテ

$$\mu_*(\mathcal{O}_f - G/N) = 0.$$

II) 任意  $A \subset G =$  對シテ 2) ヲ満足スル  $\mathcal{L}$  ヲトレ

ル

$$m^*(A) = m(r^{-1}(\mathcal{L})) = \mu(\mathcal{L}) = m_\mu(r^{-1}(\mathcal{L})) \geq m_\mu^*(A).$$

$m_\mu$  ニホ 1) 2) ヲ満足スルカヲ, 同様ニシテ,

$$m_\mu^*(A) \geq m^*(A)$$

ナルコトが分ル。故ニ

$$m^* = m_\mu^*. \quad (\text{証明終})$$

3. Cartetisches Produkt.  $G/N \subset \mathcal{O}_f$  + ル

トキハ

$$G \times G/N \times N = G/N \times G/N \subset \mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$$

ト考ヘラレル。<sup>21)</sup> コノトキ

定理10.  $m^*$  ガ  $\mathcal{O}_f$  1) daer, Maß  $\mu^* =$  ヲツテ

2)  $K \times R$  ハ  $x, y \in R$  + ル Paar  $(x, y)$  / 全体ヨリ成ル空間ナ

アル。§1. Nr. 3 参照。  $G \times G/N \times N \subset \mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$  + ル

Einsbettung ハ

$$r_{N \times N}(x, y) = (r_N(x), r_N(y))$$

ナリトラレル。吾々ハ簡單ニスル,  $r_N, r_{N \times N}$  ナ共ニ同ジ

文字ヲ用ハス。



$$\begin{aligned}\mu\mu(\Delta) &= \underline{\lim}_{\mathbb{H} \supset \Delta} \mu\mu(\mathbb{H}) \\ &= \underline{\lim}_{\mathbb{H} \supset \Delta} m.m(r^{-1}(\mathbb{H})) \geq m.m(r^{-1}(\Delta)).\end{aligned}$$

然ルニ、 $\mathbb{H} \supset \Delta$  トスレバ、 $m.m(r^{-1}(\mathbb{H})) = \mu\mu(\mathbb{H}) \neq \mu\mu(\Delta)$  カラ

$$m.m(r^{-1}(\Delta)) + m.m(r^{-1}(\mathbb{H} - \Delta)) = \mu\mu(\Delta) + \mu\mu(\mathbb{H} - \Delta)$$

故ニ、上ノ不等式ハ等式デナケレバナラナイ：

$$m.m(r^{-1}(\Delta)) = \mu\mu(\Delta).$$

2)  $\Gamma \ni G \times G$  ノ任意ノ部分集合トスル。然ルトキハ

$$m.m^*(\Gamma) = \underline{\lim}_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) m^*(B_j), \quad \sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma.$$

然ルニ、 $m^* = m_{\mu}^*$  デアルカラ、

$$r^{-1}(\alpha_j) \supset A_j, \quad m^*(A_j) = \mu(\alpha_j);$$

$$r^{-1}(\beta_j) \supset B_j, \quad m^*(B_j) = \mu(\beta_j).$$

ナラバ、Borel set  $\alpha_j, \beta_j$  ガ存在スル。従ツテ、Borel set  $\alpha_j^{(N)}, \beta_j^{(N)}$  ノ適當ニ選ンテ

$$m.m^*(\Gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\alpha_j^{(N)}) \mu(\beta_j^{(N)}).$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(N)} \times \beta_j^{(N)} \supset \Gamma$$

ナラシメルコトガ出來ル。コノデ

$$\Delta = \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^{(N)} \times \beta_j^{(N)}$$

トオケバ、明カニ  $\Delta \ni \alpha_j \times \alpha_j$  Borel set デアツテ、

$$r^{-1}(\Delta) \supset \Gamma$$

且  $y$

$$m m(r^{-1}(\Delta)) = \mu \mu(\Delta) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\sigma_j^{(N)}) \mu(\mathcal{L}_j^{(N)});$$

従て,  $N \rightarrow \infty$  とすれば

$$m m(r^{-1}(\Delta)) = m m^*(\Gamma).$$

故て, 定理 9 =  $\exists \forall \exists$

$$m m^* = m_{\mu \mu}^* \quad (\text{証明終})$$

4. 定理 11.  $\text{Idaar}$ ,  $\text{Ma\ss} = \exists \forall \exists$  induzieren  
 +  $\text{Le} \times \text{Ma\ss}$   $\wedge$  Weil,  $\text{Ma\ss}$   $\nexists \forall \exists$   $\mu$ .  $\text{st} + \text{st}$ ,  $G/N \subset \mathcal{O}_f$ ,  
 $m^* \nexists \mathcal{O}_f$ ,  $\text{Idaar}$ ,  $\text{Ma\ss} = \exists \forall \exists$  induzieren +  $\text{Le}$   
 $\times G$ ,  $\text{Ma\ss}$   $\text{st}$   $\text{st}$ ,  $m^*$   $\wedge$  links-invariant  $\nexists$   
 $\forall \forall \exists$ ,  $x \in G$ , 函数  $f(x)$   $\mu$ -me\ssbar +  $\text{st}$   $\times$ , = 変  
 数  $x, y$ , 函数  $f(y^{-1}x)$   $\mu$ -me\ssbar  $\nexists \forall \exists$ .

証明:  $m^*$   $\mu$  links-invariant +  $\text{st}$   $\text{st}$   $\wedge$  既 =  
 定理 8  $\nexists$  証明  $\text{st}$ . 次て,  $\mathcal{L}_f \nexists \mathcal{O}_f$ , Borel set  $\text{st}$   $\text{st}$ ,  
 $\forall$ , charakteristische Funktion  $e_{\mathcal{L}}(\xi)$   $\wedge$   
 $\xi (\in \mathcal{O}_f)$ , Baire, 函数  $\nexists \forall \exists$   $\mu$ ,  $e_{\mathcal{L}}(\eta^{-1}\xi)$   $\wedge$   
 $\mathcal{O}_f \times \mathcal{O}_f$ , Baire, 函数  $\nexists \forall \exists$ . 然ル = 定理 10 = 依  
 $\text{st}$

$$m m^* = m_{\mu \mu}^*$$

$\nexists \forall \exists$   $\mu$ , 定理 9 =  $\exists \forall \exists$  <sup>22)</sup>

$$e_{\mathcal{L}}(r(y^{-1}x))$$

$\wedge G \times G$ ,  $m m$ -me\ssbar + 函数  $\nexists \forall \exists$ . 従て

(脚註 22)  $\wedge$  次頁へ



$$e_{L_0}(r(x)) = e_{r^{-1}(L_0)}(x)$$

デアルカラ

$$e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x)$$

ハ、二変数  $x, y \in G$ 、 $m$ -measurable + 函数デアル。

今、 $A_0 \subset G$ 、 $m$ -Measure 0 + 部分集合トスレバ、

$$m^* = m_\mu^* \text{ デアルカラ、}$$

$$r^{-1}(L_0) \supset A_0, \quad m(r^{-1}(L_0)) = 0$$

+ ル Of, Borel set  $L_0$  が存在スル。Charakteristische Funktion = ツイテ考へレバ、

$$e_{r^{-1}(L_0)}(x) \geq e_{A_0}(x),$$

従ツテ

$$e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x) \geq e_{A_0}(y^{-1}x).$$

然ル =  $e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x)$  ハ  $m$ -measurable デアルツテ、

$$\int_G e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x) m(dx) = m(r^{-1}(L_0)) = 0$$

デアルカラ、Fubini の定理 = ヲツテ

$$\begin{aligned} \iint_{G \times G} e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x) m(dx) m(dy) \\ = \int_G m(dy) \int_G e_{r^{-1}(L_0)}(y^{-1}x) m(dx) = 0; \end{aligned}$$

22) 一般 =  $m = m_\mu$  + ルトキ、 $f(\xi)$  が Baire 1 函数 + ラバ  $F(x) = f(r(x))$

ハ  $x$ 、 $m$ -measurable + 函数デアル。何レナレバ、0 附近、閉集合

トスレバ、 $f^{-1}(0)$  ハ Borel 集合デアルカラ、定理 9 = ヲツテ  $F^{-1}(0) =$

$r^{-1}f^{-1}(0)$  ハ  $m$ -measurable デアル。



コノ定理11ノ証明ニ於テ、 $y^{-1}x$ ヲ $yx$ ニ置換ヘレバ、  
次ノ定理12ガ得ラレル:

定理12.  $m^* = m_\mu^*$  ガ  $\lambda$   $\text{Ma\ss}$  =ヨリテ  
induzieren セル  $\text{Ma\ss}$  トトキ、 $x$ ノ函数  $f(x)$  ガ  
 $m$ -meßbar トバ、二変数  $x, y$ ノ函数  $f(yx)$  モ  
 $m$ -meßbar デアル。

—— ( 續 ク ) ——